INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

MINISTERUL EDUCAȚIEI CERCETĂRII TINERETULUI ȘI SPORTULUI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 18.02.2012 -

CLASA A 12 – A
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 10 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1 (*N. Bourbăcuţ*)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție care este de două ori derivabilă şi are proprietăţile:

$$f(0)=0, f'(0)=1 \text{ şi } f''(x)+2f'(x)+f(x)\geq 0 \text{ pentru orice } x\in\mathbb{R}.$$

a) Arătaţi că funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $F(x)=e^x f(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$ este convexă şi $f(x)\geq xe^{-x}$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătaţi că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^1 x^n f(x)dx \geq \frac{(n+1)!}{e}\left(e-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\ldots-\frac{1}{(n+1)!}\right)$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $F''(x)=(f''(x)+2f'(x)+f(x))e^x\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$, deci F este convexă	**3 puncte**
Pentru $g(x)=e^x f(x)-x$, $g''=F''\geq 0$, deci g' este crescătoare	**1 punct**
Din $g'(0)=e^0(f(0)+f'(0))-1=0$ deducem că $g'\geq 0$ pe $[0;\infty)$ şi $g'\leq 0$ pe $(-\infty;0]$, deci 0 este punct de minim al funcţiei g, iar valoarea minimă este $g(0)=0$	**2 puncte**
b) $\int_0^1 x^n f(x)dx\geq\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$	**1 punct**
$\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx=\frac{(n+1)!}{e}\left(e-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\ldots-\frac{1}{(n+1)!}\right)$	**3 puncte**

Subiectul 2 (*C. Chiteş* şi *B. Năstăsescu*)

a) Rezolvați în $\mathbb{Z}_5$ ecuația $x^3=a^2$, unde $a\in\mathbb{Z}_5$.

b) Fie $n\in\mathbb{N}^*$ şi $(G,\cdot)$ un grup cu $3n+1$ elemente. Arătaţi că, pentru orice $a\in G$, ecuaţia $x^3=a^2$ are exact o soluţie.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Dacă $a=\hat{0}$, atunci $x=\hat{0}$ este unica soluție	**1 punct**
Dacă $a\neq\hat{0}$, atunci ecuația are soluția a^2	**2 puncte**
Apoi, dacă $x^3=y^3$ atunci $x=x^6=y^6=y$, deci soluţia este unică	**2 puncte**
b) O soluţie a ecuaţiei este a^{n+1}, pentru că $(a^{n+1})^3=a^{3n+1}a^2=a^2$	**2 puncte**
Dacă x,y sunt soluţii ale ecuaţiei şi e este elementul neutru al grupului, atunci $e=x^{3n+1}=a^{2n}x$ şi $e=y^{3n+1}=a^{2n}y$, de unde $x=y$	**3 puncte**

Subiectul 3 (***)

Dacă $(G,\cdot)$ este un grup finit cu elementul neutru *e* şi *p* este un număr natural nenul, notăm

$$G_p = \{x \in G \mid x^p = e\}.$$

a) Arătaţi că, dacă *p* este impar, atunci G_p are un număr impar de elemente.

b) Arătaţi că nu există un grup $(G,\cdot)$ astfel încât G_2 să aibă 3 elemente, dar există un grup $(G,\cdot)$ astfel încât G_2 să aibă 4 elemente.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Observăm că $e \in G_p$	**2 puncte**
Apoi, dacă $x \in G_p$, atunci $x^{-1} \in G_p$	**2 puncte**
Dacă $x \in G_p$ şi $x = x^{-1}$, atunci $x^2 = e$, de unde $x = x^{p+1} = e$, deci G_p este o reuniune a lui $\{e\}$ cu mulţimi disjuncte, de forma $\{x, x^{-1}\}, x \neq e$	**2 puncte**
b) Dacă $G_2 = \{e,a,b\}$ şi $ab = ba$, atunci $ab \in G_2$ şi $ab \neq e,a,b$ – contradicţie –, iar dacă $ab \neq ba$, atunci $aba \in G_2$ şi $aba \neq e,a,b$ – contradicţie	**2 puncte**
Exemple pentru care G_2 are 4 elemente sunt grupul lui Klein sau grupul simetric S_3	**2 puncte**

Subiectul 4 (*N. Bourbăcuţ*)

Fie $m \in (0;1)$. Vom spune că o funcţie $f:[0;1] \to [0;1]$ *are media m* dacă este integrabilă şi

$$\int_0^1 f(x)dx = m.$$

a) Arătaţi că mulţimea funcţiilor care au media *m* este infinită.

b) Arătaţi că, dacă $g:[0;1] \to \mathbb{R}$ este o funcţie crescătoare şi *f* este o funcţie cu media *m*, atunci

$$\int_0^m g(x)dx \le \int_0^1 f(x)g(x)dx \le \int_{1-m}^1 g(x)dx$$

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Funcțiile de forma $f(x) = m + a(x - 1/2)$, unde $\lvert a \rvert \le 2\min(m, 1-m)$, au media *m*	**3 puncte**
b) Prima inegalitate se scrie $\int_0^m g(x)(1-f(x))dx \le \int_m^1 g(x)f(x)dx$	**3 puncte**
Din ipoteză $f(x) \ge 0$ şi $g(x) \ge g(m)$ pe $[m;1]$, deci $\int_m^1 g(x)f(x)dx \ge g(m)\int_m^1 f(x)dx$; analog $\int_0^m g(x)(1-f(x))dx \le g(m)\int_0^m (1-f(x))dx = g(m)\left(m - \int_0^m f(x)dx\right) = g(m)\int_m^1 f(x)dx$, ceea ce demonstrează prima relaţie	**3 puncte**
A doua inegalitate se demonstrează analog.	**1 punct**
Observaţie. În cazul în care se demonstrează a doua inegalitate dar nu şi prima, se vor acorda la punctul b) **6 puncte din cele 7.**	**-**